Afiche Los Favoritos 2010 – Respuestas

Problemas de la Prueba Canguro

7º grado: **1.** D (174); **2.** E (41); **3.** C (17).
8º grado: **4.** A (2); **5.** B (54°).
9º grado: **6.** E (60°); **7.** D (2).
1º diversificado: **8.** B ($80 - 2\pi$); **9.** E (24).
2º diversificado: **10.** B (763); **11.** A (14) $\longrightarrow$

0	0	0	0
0	0	0	1
2	2	1	1
3	2	1	1

Problemas de la Prueba Regional

7º grado:

12. Luego de la quinta operación quedaron 3 litros, entonces antes de agregar el litro había 2 litros y antes de vaciar la mitad había 4 litros. Repitiendo este razonamiento, antes de la cuarta operación el barril contenía 6 litros, antes de la tercera 10 litros, antes de la segunda 18 litros y al comienzo 34 litros.

13. Si se ponen en orden creciente de alturas, las primeras 8 cabras deben ser de piel oscura, y luego deben irse alternando piel clara y piel oscura: OOOOOOOO-COCOC...OC. Luego de las primeras 7 O's, aparecen 1001 grupos OC, luego hay 1001 cabras de piel clara.

8º grado:

14. Los conjuntos posibles con cuatro dígitos impares diferentes son $\{1,3,5,7\}$, $\{1,3,5,9\}$, $\{1,3,7,9\}$, $\{1,5,7,9\}$ y $\{3,5,7,9\}$. Pero para que un número sea múltiplo de 9 la suma de sus cifras también debe serlo, lo cual sólo lo cumple $\{1,3,5,9\}$. Como estos números se pueden ordenar de $4\times3\times2\times1 = 24$ maneras, la respuesta es 24.

15. Los primeros números de la lista son 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, 145,... El 89 aparece en cuarto lugar y también en la posición 12, por lo tanto, la sucesión es periódica de período 8: los números del cuarto al undécimo (89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58) se repiten a partir de la posición 12, y luego a partir de las posiciones 20, 28, 36,... Como en las posiciones divisibles entre 8 siempre va un 4, en la posición 2008 va un 4 y en la 2009 va el 16.

9º grado:

16. Apu y Cip son pícaros y Bop es caballero. En efecto, Apu no puede ser caballero pues entonces su afirmación sería falsa. Por lo tanto, Apu es pícaro y es falso que los tres sean pícaros, es decir que al menos uno de los otros dos es caballero. Si Bop fuese pícaro, entonces Cip debería ser caballero, y habría exactamente un caballero, haciendo cierta la afirmación de Bop (contradicción). Entonces Bop debe ser caballero, y Cip pícaro.

17. Inicialmente Ana puede descartar 1, 2 ó 3 barajitas, pasándole 6, 5 ó 4 a Bruno. Si Bruno recibe 6 descarta 3, si recibe 5 descarta 2 y si recibe 4 descarta 1, pasándole en cualquier caso 3 barajitas a Ana. Ahora Ana sólo puede descartar una y pasarle 2 a Bruno, quien descarta una, le pasa la otra a Ana, y gana.

1º diversificado

18. Como $\bigstar\triangledown\lozenge\square$, $\bigstar\triangledown\lozenge\triangle$ y $\bigstar\triangledown\bigstar\triangledown$ son consecutivos, debe ser $\triangle = 4$ y $\triangledown = 0$. Además a $\square$ le sigue $\triangle$, por lo tanto $\square = 3$. Sólo queda asignar 1 y 2 a $\lozenge$ y $\bigstar$, pero como a $\lozenge$ le sigue $\bigstar$ debe ser $\lozenge = 1$ y $\bigstar = 2$. El primero de los tres números dados es entonces

$$\bigstar \cdot 5^3 + \triangledown \cdot 5^2 + \lozenge \cdot 5 + \square = 2 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 3 = 258$$

y los otros dos son 259 y 260.

19. (a) Deben terminar en 5, y las primeras siete cifras pueden ser cualquier arreglo de 7 elementos tomados de $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, de los cuales hay $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40320$.
(b) Como $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$, las únicas 8 cifras diferentes no nulas cuya suma es múltiplo de 9 son las del 1 al 8. Por lo tanto, la respuesta es $8! = 40320$.

2º diversificado

20. Los triángulos BAD y ACD son semejantes, y como $AB/AC = 3/2$ se sigue que $BD/AD = AD/DC = 3/2$, y entonces

$$5 = BD - DC = \frac{3}{2}AD - \frac{2}{3}AD = \frac{5}{6}AD,$$

de donde $AD = 6$, $BD = (3/2)AD = 9$, $DC = (2/3)AD = 4$, $BC = 9 + 4 = 13$ y finalmente el área pedida es $13 \cdot 6/2 = 39$.

21. Si eran $n = 10a+b$ matemáticos, con $0 < a \le 9$, $0 \le b \le 9$, la condición del problema se traduce en $10a + b = 2ab - 9$. Es claro que $b = 2ab - 10a - 9$ debe ser impar. Además como $2(b-5)a = b + 9 > 0$ debe ser $b > 5$, y b sólo puede ser 7 ó 9. Pero $b = 9$ se descarta pues quedaría $8a = 18$, que no tiene solución. Entonces $b = 7$, de donde $4a = 7 + 9 = 16$ y $a = 4$. Es decir que el número de matemáticos era 47.

Problemas de la Prueba Final

7º grado

22. En la primera pasada se borran todos los impares, quedando los pares del 2 al 2008. La segunda pasada deja todos los múltiplos de 4 desde el 4 hasta el 2008. Así sucesivamente van quedando los múltiplos de 8, luego los de 16, 32, 64, 128, 256, 512 y 1024. Como $1728 = 64 \cdot 27$, sobrevive a la sexta pasada y es borrado en la séptima. Como el único múltiplo de 1024 (no mayor que 2009) es el mismo 1024, éste es el último número borrado y se elimina en la pasada número 11.

8º grado

23. Cualquier $n > 0$ se puede escribir como $n = 5k + r$, con $0 \leq r \leq 4$. Como $5k+1 = 5(k-7)+36$, $5k+2 = 5(k-2)+12$, $5k+3 = 5(k-9)+48$ y $5k+4 = 5(k-4)+24$, resulta que si $k \geq 9$ (o sea si $n \geq 45$) el pedido se puede despachar exactamente. Como también $44 = 5 \cdot 4 + 12 \cdot 2$ se puede despachar, el mayor que no se puede despachar exactamente es 43. En efecto, para despachar 43 habría que usar 1, 2 ó 3 cajas grandes, pero ni $43-12 = 31$, ni $43-24 = 19$, ni $43-36 = 7$ son múltiplos de 5, por lo tanto, no es posible.

9º grado

24. La suma de todos los números en el conjunto es $(1+17)17/2 = 153$. Debemos hallar enteros x e y, con $1 \leq x < y \leq 17$, tales que $xy = 153-x-y$. Esta ecuación se puede reescribir como $xy+x+y+1 = 154$, o bien $(x+1)(y+1) = 2 \cdot 7 \cdot 11$, que se satisface para $x = 10$, $y = 13$.

1º diversificado

25. El tablero tiene 36 casillas, y las dos que se van a pintar se pueden escoger de $\binom{36}{2} = 630$ maneras. La mayoría de las 630 coloraciones posibles se pueden poner en grupos de a cuatro equivalentes (que se obtienen rotando una de ellas 90°, 180° y 270°), excepto las que tienen las dos casillas simétricas respecto al centro del tablero, que sólo son equivalentes a otra más (pues la rotación de 180° las deja invariantes, y las de 90° y 270° dan lo mismo). Como hay 18 pares de casilas simétricas respecto al centro del tablero, el número de coloraciones no equivalentes es $18/2 + (630-18)/4 = 9 + 153 = 162$.

2º diversificado

26. Sea E el pie de la altura desde A. Como AEC es un triángulo rectángulo con $\measuredangle ACE = 30°$, es claro que $AE = AC/2 = AD$, y como $\measuredangle EAD = 60°$ resulta que EAD es equilátero, y $\measuredangle BDE = 60° - 45° = 15°$. Como también $\measuredangle DBC = 45° - 30° = 15°$, resulta que BED es isósceles y $BE = DE = AE$, de donde $\measuredangle ABE = 45°$ y $\measuredangle ABD = 45° - 15° = 30°$.

